

- l) $\frac{5 \tan 222,8^\circ - 0,5 \cos 68,9^\circ}{4,45 \sin^2 90^\circ}$
 m) $\frac{\cot 43,6^\circ + 5 \sin (-65,5^\circ)}{0,7 \tan^2 60^\circ}$
 n) $\frac{\tan 85,6^\circ - \cot 365,6^\circ}{\sin 278,1^\circ - \cos 90^\circ}$

12. Prueba que:

a) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos \frac{\pi}{4}} - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

b) $\frac{\frac{1}{\cos 60^\circ} - \cos 30^\circ}{\tan \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6}} = 4 - \sqrt{3}$

c) $3 \cot^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4}$

d) $\frac{4 \cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{3}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{5 \sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{5}$

e) $3 \tan \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sqrt{3} \cos 150^\circ = 0$

13. Si $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 6}{3x + 2}$; $B = \frac{2 \cos 45^\circ}{\sin 120^\circ}$. Prueba que:

a) $A \cdot B + \frac{4A}{B} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{2AB + 3B}{\sqrt{27}} = \sqrt{2}$

14. Dadas las funciones siguientes, calcula $f'(x_0)$ (punto 17 del Memento).

a) $f(x) = x^3 + 2x + 5$; $x_0 = \sqrt{5}$

b) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 5)$; $x_0 = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$; $x_0 = -1$

d) $f(x) = \frac{4 - x}{2x + 3}$; $x_0 = -2,5$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; $x_0 = 4$

f) $f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + 1)$; $x_0 = \sqrt{2}$

g) $f(x) = \cos^2 x + \sin 3x$; $x_0 = \frac{\pi}{8}$

15. Un trabajador gana \$100 mensuales y gasta como promedio \$85. ¿Cuántos meses tendrá que ahorrar para comprar un radio de \$60?

16. Un estudiante tiene que hacer 30 problemas. Un día resuelve $\frac{3}{10}$ y al día siguiente los $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver aún?
17. Un padre deja al morir \$4500 para repartir entre sus tres hijos. El mayor debe recibir $\frac{2}{9}$ de la herencia; el segundo $\frac{3}{5}$ de la parte del anterior y el tercero lo restante. ¿Cuánto recibirá cada uno?
18. Tres brigadas de estudiantes llevaron a cabo la recogida de papas en una CPA, la brigada N.º 1 recogió $\frac{1}{3}$ del total de la jornada y la brigada N.º 3 la cuarta parte del resto. ¿Qué brigada recogió mayor cantidad de papas?
19. Los 6 trabajadores de una unidad de comercio interior se han propuesto recaudar un día de haber para las MTT. De ellos 3 tienen un salario mensual de \$145,25, dos de \$163,50 y uno de \$190,85. ¿A cuánto asciende el aporte de este centro para las MTT? (considera 24 días hábiles en el mes)
20. Un camión conduce unos fardos de mercancías. El primero pesa 72,7 kg, el segundo 8 kg menos que el primero, el tercero 6,1 kg más que los dos anteriores juntos, y el cuarto tanto como los tres anteriores. ¿Cuál es el peso del quinto fardo si el peso total de las mercancías es de 960,3 kg?
21. Un empleado que gana \$75 quincenales, ahorra cada quincena una cierta suma de dinero. En el período de tiempo que ganó \$450, ahorró \$31,20. ¿Cuánto dinero ahorró quincenalmente?
22. Un tanque de agua puede llenarse por dos llaves, una que vierte 65 L/min y otra que vierte 55 L/min. Si la capacidad del tanque es de 3600 L y estando vacío se abren al mismo tiempo las dos llaves, ¿qué tiempo tardará en llenarse?
23. Un tanque tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave vierte 45 L cada 3 minutos y la segunda 100 L cada 5 minutos y por el desagüe salen 200 L cada 4 min

- Si estando lleno el tanque se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, se vacía en hora y media. Halla su capacidad.
24. En una zafra el plan de siembra de caña fue de 11 556 caballerías. Si se sembró el 74% antes de las lluvias, ¿cuántas caballerías faltan por cumplir el plan?
25. En un parqueo de reparaciones agrícolas con un plan de 8876 equipos se habían reparado en el tercer trimestre el 89% de los equipos. ¿Cuántos equipos se tienen que reparar en el cuarto trimestre para cumplir el plan?
26. Una escuela estuvo representada en las competencias de atletismo por 17 estudiantes, de ellos 4 niñas. ¿Qué por ciento de niños participó en las competencias?
27. Una finca tiene 480 ha. El 30% de la mitad de la finca está sembrado de caña y el resto de la finca de frutos menores. ¿cuántas hectáreas están sembradas de frutos menores?
28. Un obrero ahorró el año pasado \$840 que es el 20% de su salario anual. ¿Cuál es su salario mensual?
29. Un soldado en Egipto observó que cuando su bastón colocado verticalmente arrojaba una sombra de 65 cm de largo, la Gran Pirámide de Cheops arrojaba una sombra de unos 153 pasos de largo, medidos partiendo del centro de la base. Si el bastón tenía una longitud de 85 cm y el paso del soldado abarcaba unos 75 cm, ¿qué altura en metros tenía la pirámide?
30. Un motorista averigua que en cierto viaje de prueba recorrió 90 km con 18 L de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina necesitará para un viaje de 1000 km, viajando en las mismas condiciones?
31. Si 20 hombres pueden hacer un trabajo en 15 días. ¿Cuántos hombres más se necesitarán tomar para realizar el trabajo en los $\frac{4}{5}$ de ese tiempo?
32. Se quiere cercar un terreno rectangular que mide 10,3 m de largo y 7,25 m de ancho. ¿Cuántos metros de cerca hay que utilizar? ¿Cuánto mide el área cercada?

33. En la figura 1 se representa la planta baja de un edificio. Calcula el área de la misma.

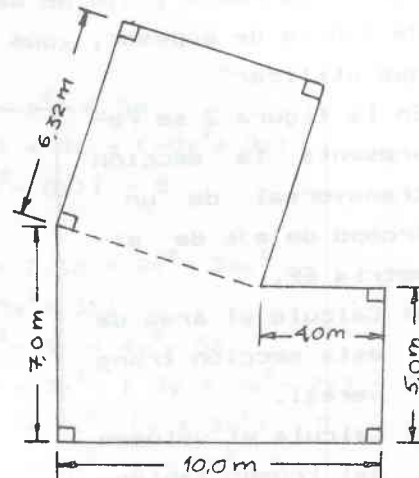


Fig. 1

34. Un paseo de 4,0 m de ancho bordea un estanque circular. ¿Cuál es el costo para la construcción del paseo, si el diámetro del estanque es de 50 m y el metro cuadrado de paseo vale \$1,25?
35. Un recipiente cilíndrico tiene una altura de 4,0 dm y un diámetro de 1,4 dm. ¿Cuántos recipientes de este tipo se necesitan en una empresa química para almacenar 15 000 cm³ de ácido clorhídrico?
36. En un recipiente cilíndrico con diámetro interior de 65 mm, se vierten 240 cm³ de agua. Se debe añadir ácido sulfúrico hasta una marca situada a 102 mm de altura. ¿Cuántos cm³ de ácido sulfúrico se deben añadir?
37. Pequeños tubos de 3,0 cm de diámetro y 5,0 cm de altura se empacan en una caja cuyas dimensiones son: 5 x 12 x 18 cm. ¿Cuánto espacio se desperdicia dentro de la caja entre los tubos?
38. Un tanque de gasolina tiene la forma de un cilindro con extremos semiesféricos. Suponiendo que el diámetro de la parte cilíndrica es de 4,0 m y su longitud total de 14 m, ¿cuántos galones contendrá cuando esté lleno? (Considera que un galón es aproximadamente 5 L)
39. Se quiere construir un recipiente plástico de forma cilíndrica sin tapa que tiene medidas exteriores de

1,0 dm de radio y 3,0 dm de altura. Si las paredes son de 2,0 cm de espesor, ¿qué cantidad de plástico hay que utilizar?

40. En la figura 2 se representa la sección transversal de un trompo de eje de simetría EF.

- Calcula el área de esta sección transversal.
- Calcula el volumen del trompo sabiendo que está compuesto por conos y cilindros.

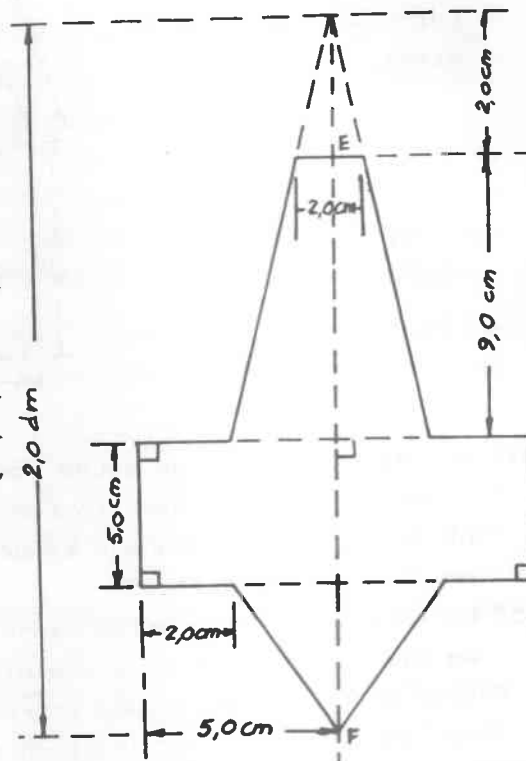


Fig. 2

41. Una esfera tiene 452 cm^2 de área. Halla el radio de la base de un cono de 12 cm de altura que tenga un volumen equivalente al de la esfera.

2. Cálculo con expresiones algebraicas

En el trabajo con variables se cumplen las mismas propiedades y se efectúan las mismas operaciones que ya has estudiado con los números reales.

- Los términos semejantes se reducen operando con los coeficientes y manteniendo la parte literal.
- Los signos de agrupación precedidos de un signo + se eliminan conservando el signo de cada término incluido dentro de ellos. Si está precedido de signo -, el signo de cada término cambia.

Ejemplo 1

- Efectúa:
- a) $5a + 3x^2 - 3ax^2 - x^2 + 2, 3a$
 - b) $-4y^2 + (3y^2 - 4z) + 2z - (-5y^2 + 3z)$
 - c) $3x^2 - [3y + (3x^2 - 2y)] - 5$

Resolución

- a) $5a + 3x^2 - 3ax^2 - x^2 + 2, 3a = 7, 3a + 2x^2 - 3ax^2$
- b) $-4y^2 + (3y^2 - 4z) + 2z - (-5y^2 + 3z)$
 $= -4y^2 + 3y^2 - 4z + 2z + 5y^2 - 3z = 4y^2 - 5z$
- c) $3x^2 - [3y + (3x^2 - 2y)] - 5 = 3x^2 - [3y + 3x^2 - 2y] - 5$
 $= 3x^2 - [y + 3x^2] - 5$
 $= 3x^2 - y - 3x^2 - 5$
 $= -y - 5$

Para la multiplicación de expresiones algebraicas, multiplicas cada término de una expresión por cada uno de los términos de la otra (aplicas la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma) y finalmente agrupas términos semejantes si existen.

Las multiplicaciones pueden abreviarse si se utilizan los llamados productos notables:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\(x + a)(x + b) &= x^2 + (a + b)x + ab \\(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Efectúa los productos siguientes:

- a) $(a + b)(c + d)$
- b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- c) $(2x + 3)(x^2 + \frac{1}{2}x)$
- d) $(m + 7)(m - 4)$
- e) $(3p^2 + \frac{1}{2})(3p^2 - \frac{1}{2})$
- f) $(2a + \sqrt{5})(2a + \sqrt{5})$
- g) $(5m + 2)(5m + 2)(5m + 2)$

Resolución

- a) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$
- b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3$

$$c) (2x + 3) \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) = 2x^3 + x^2 + 3x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$d) (m + 7)(m - 4) = m^2 + 3m - 28$$

$$e) \left(3p^2 + \frac{1}{2}\right) \left(3p^2 - \frac{1}{2}\right) = 9p^4 - \frac{1}{4}$$

$$f) (2a + \sqrt{5})(2a + \sqrt{5}) = (2a + \sqrt{5})^2$$

$$= 4a^2 + 4\sqrt{5}a + 5$$

$$g) (5m + 2)(5m + 2)(5m + 2) = (5m + 2)^3$$

$$= 125m^3 + 150m^2 + 60m + 8$$

El proceso contrario de multiplicar es la descomposición en factores.

Para descomponer en factores, o sea, transformar sumas en productos, se utilizan el factor común, los productos notables y otros conocimientos sobre la multiplicación.

Observa en el ejemplo 2 inciso b que si tienen una diferencia de cubos, es decir, $a^3 - b^3$, esta la puedes descomponer en factores fácilmente pues

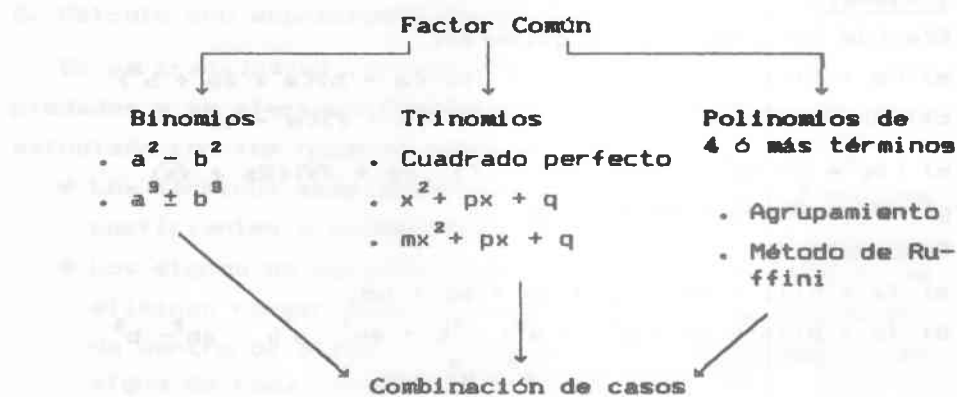
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

de forma similar podrías descomponer una suma de cubos, pues

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Compruébalo efectuando el producto.

El esquema siguiente te resume el orden en que debes proceder para descomponer en factores.



Ejemplo 3

Descompón en factores las siguientes sumas:

(punto 13 del Memento)

a) $25k^2 - 20k + 4$

b) $x^2 - x - 6$

c) $2am^2 - 32a$

d) $6x^2 - 15x - 36$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

f) $x^4 - 6x^2 - 27$

g) $x^3 - 8$

h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Resolución

a) $25k^2 - 20k + 4 = (5k - 2)^2$ es un trinomio cuadrado perfecto

b) $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ es un trinomio de la forma $x^2 + px + q$

c) $2am^2 - 32a = 2a(m^2 - 16)$
 $= 2a(m + 4)(m - 4)$ se extrajo factor común y se aplicó diferencia de cuadrados.

d) $6x^2 - 15x - 36 = 3(2x^2 - 5x - 12)$
 $= 3(2x + 3)(x - 4)$ se extrajo factor común y se descompuso el trinomio $mx^2 + px + q$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Como no existe factor común y es un polinomio de tercer grado, apliquemos Ruffini.

	1	2	-5	-6
2		2	8	6
	1	4	3	0

divisores de -6:

$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$
 $= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$ se continuó la factorización descomponiendo el $x^2 + px + q$

f) $x^4 - 6x^2 - 27$

En este caso estamos en presencia de un trinomio $y^2 + py + q$ donde $y = x^2$. Se descompone como un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, es decir:

$x^4 - 6x^2 - 27 = (x^2)^2 - 6x^2 - 27$ luego:

$x^4 - 6x^2 - 27 = (x^2 - 9)(x^2 + 3)$

$$= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 3)$$

se aplicó también la diferencia de cuadrados.

Observa que en este caso también puedes aplicar Ruffini colocando ceros en los términos correspondientes a x^3 y a x , es decir:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & 0 & 27 \\ -3 & & -3 & 9 & -9 & 27 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -9 & 0 \end{array}$$

Divisores de 27

$\pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 27$

Los factores son: $(x + 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 9)$. Aplicando nuevamente Ruffini o factor común por agrupamiento resulta, $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 3)$.

g) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

se aplicó diferencia de cubos.

Observa que por ser un polinomio de tercer grado otra vía para descomponerlo sería aplicando Ruffini, colocando ceros en los términos correspondientes a x^3 y a x .

h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

En este caso se puede aplicar Ruffini, pero si se agrupan convenientemente los términos se puede factorizar aplicando factor común.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (x^3 + 3x^2) + (-4x - 12) \\ &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

La descomposición factorial facilita la simplificación de cocientes. Si los términos no están descompuestos en factores, al igual que en la aritmética, para poder simplificar debes realizar dicha descomposición.

Ejemplo 4

Simplifica los siguientes cocientes:

a) $\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2}$

b) $\frac{b^2 + 2b - 15}{b^2 - 6b + 9}$

c) $\frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}{2x^2 - 3x - 2}$

Resolución

a) $\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{a(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a}{a + b}$

$$b) \frac{b^2 + 2b - 15}{b^2 - 6b + 9} = \frac{(b + 5)(b - 3)}{(b - 3)^2} = \frac{b + 5}{b - 3}$$

$$c) \frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x + 4)(x + 3)(x - 2)}{(2x + 1)(x - 2)} \\ = \frac{(x + 4)(x + 3)}{2x + 1} \\ = \frac{x^2 + 7x + 12}{2x + 1} \quad \blacksquare$$

Al realizar las operaciones con cocientes (adición, sustracción, multiplicación y división) utilizas las mismas reglas conocidas para calcular con números reales (punto 12 del Memento).

Ejemplo 5

Calcula:

$$a) \frac{x^3 - 7x - 6}{x + 4} : \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$b) \frac{x - 2}{x^2 - x} - \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4} + \frac{x^2 + 12x + 16}{x^4 + 3x^3 - 4x^2}$$

$$c) \frac{9a^2 - 16}{3a^2 - 11a - 20} : \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 25} - \frac{3a^2 + 3}{a^2 - 9}$$

Resolución

$$a) \frac{x^3 - 7x - 6}{x + 4} : \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x + 2} \\ = \frac{(x - 3)(x + 1)(x + 2)}{x + 4} \cdot \frac{x(x + 4)}{(x + 2)(x + 1)} \\ = x(x - 3) = x^2 - 3x$$

$$b) \frac{x - 2}{x^2 - x} - \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4} + \frac{x^2 + 12x + 16}{x^4 + 3x^3 - 4x^2} \\ = \frac{x - 2}{x(x - 1)} - \frac{x + 3}{(x + 4)(x - 1)} + \frac{x^2 + 12x + 16}{x^2(x + 4)(x - 1)} \\ = \frac{x(x + 4)(x - 2) - x^2(x + 3) + x^2 + 12x + 16}{x^2(x + 4)(x - 1)} \\ = \frac{x^3 + 2x^2 - 8x - x^3 - 3x^2 + x^2 + 12x + 16}{x^2(x + 4)(x - 1)}$$